ROAD zenodo Scopus

ISSN 2717-7076

IJORCES

INTERNATIONAL JOURNAL OF CONFERENCE SERIES ON EDUCATION AND SOCIAL SCIENCES.

PUBLISHER: ÇORUM: OCERINT -INTERNATIONAL ORGANIZATION CENTER OF ACADEMIC RESEARCH

IJORCES

International journal of conference series on education and social sciences. (Online)

November 2023

Science Editor: **Cetin Avci**
(Kadir Has University)

Available at ijorces.org
Published:
Çorum: Ocerint -International Organization Center of Academic Research
ISSN 2717-7076
Bursa
Bursa, Turkey

Editorial Board Members

УНИВЕРСАЛЬНАЯ И ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Каримова Н.Р.
Национальный университет Узбекистана
nodirakarimova@bk.ru

Под структурой данных понимается многосортная модель, обладающая эффективной реализацией. Это понятие является фундаментальным в теоретической информатике (см. обзоры [9, 6]).

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в книгах [3, 10, 11, 4]. Все другие необходимые определения даются ниже.

Всюду далее под словом система, если не оговорено противное, будем понимать произвольную алгебраическую систему эффективной сигнатуры, т.е. функция, сопоставляющая сигнатурному символу его тип является вычислимой.

Каждому сорту $\lambda \in \Lambda$ сопоставим множество натуральных чисел ω_λ типа λ полагая, что $\omega_{\lambda_i} \cap \omega_{\lambda_j} = \varnothing \ (\lambda_i \neq \lambda_j)$. Наличие одинаковых индексов для M_λ и ω_λ не должно вводить в заблуждение — это разнотипные непересекающиеся множества элементов совершенно различной природы.

Определение 1. Алгоритмическим представлением (нумерацией) счетной системы $\mathcal{M} = \langle M; \Sigma \rangle$ эффективной многосортной сигнатуры Σ называется всякое такое семейство $\mu = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda$ сюръективных отображений, где

$$\mu_\lambda : \omega_\lambda \to M_\lambda \ (\lambda \in \Lambda),$$

для которого существует эффективное семейство F_{comp} вычислимых функций, представляющих Σ-операции системы $\mathcal{M}$ в нумерации μ, т.е. всякая операция $\sigma \in \Sigma$ типа $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \to \lambda \rangle$ представляется соответствующей ей такой вычислимой функцией

$$f_\sigma \in F_{comp} : \omega_{\lambda_1} \times \ldots \times \omega_{\lambda_n} \to \omega_\lambda,$$

что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\forall x_1 \in \omega_{\lambda_1} \ldots \forall x_n \in \omega_{\lambda_n} \, [\sigma(\mu_{\lambda_1} x_1, \ldots, \mu_{\lambda_n} x_n) = \mu_\lambda f_\sigma(x_1, \ldots, x_n)].$$

Для заданной нумерации μ системы $\mathcal{M}$ каноническим μ-обогащением системы $\mathcal{M}$ будем называть систему $\mathcal{M}_\mu$ сигнатуры $\Sigma \cup C$, где $C \cap \Sigma = \varnothing, C = \{c_n \mid n \in \omega\}$ и интерпретацией символа c_n является элемент $\mu(n)$ системы $\mathcal{M}$. Через $T(F \cup C)$ будем обозначать множество всех замкнутых термов сигнатуры $\Sigma \cup C$ и запись $\overline{t} \in T(F \cup C)$ означает, что все замкнутые термы из списка $\overline{t}$ принадлежат $T(F \cup C)$.

Позитивной (негативной) диаграммой системы $\mathcal{M}_\mu$ называется множество предложений $\{p(\overline{t}) \mid \mathcal{M}_\mu \models p(\overline{t})\}$ (соответственно $\{\neg p(\overline{t}) \mid \mathcal{M}_\mu \models \neg p(\overline{t})\}$), где $p(\overline{t})$ — атомарная формула без свободных переменных от замкнутых термов $\overline{t} \in T(F \cup C)$. Позитивную (негативную) диаграмму канонического μ-обогащения $\mathcal{M}_\mu$ системы $\mathcal{M}$ будем обозначать через $\Delta_P(\mathcal{M}_\mu)$ (соответственно через $\Delta_N(\mathcal{M}_\mu)$). Диаграммой канонического μ-обогащения $\mathcal{M}_\mu$ называется множество $\Delta(\mathcal{M}_\mu) = \Delta_P(\mathcal{M}_\mu) \cup \Delta_N(\mathcal{M}_\mu)$.

Предложение 1. *Нумерованная система* $(\mathcal{M},\mu)$ *вычислима (позитивна, негативна) тогда и только тогда, когда диаграмма* $\Delta(\mathcal{M}_\mu)$ *ее канонического* μ*-обогащения вычислима (позитивная диаграмма* $\Delta_P(\mathcal{M}_\mu)$ *вычислимо перечислима, негативная диаграмма* $\Delta_N(\mathcal{M}_\mu)$ *вычислимо перечислима соответственно).*

Если $(\mathcal{M},\mu),(\mathcal{N},\nu)$ — две нумерованные системы, то будем говорить, что $(\mathcal{M},\mu)$ сводится к $(\mathcal{N},\nu)$ (в обозначениях $(\mathcal{M},\mu)\trianglelefteq(\mathcal{N},\nu)$), если существует такой изоморфизм $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, который поддерживается подходящей вычислимой функцией f на номерах, т.е. $\varphi\mu=\nu f$. Множество всех нумераций фиксированной системы разбивается на классы эквивалентности $\approx$ (получающемуся эквивалентным замыканием предпорядка, индуцированного $\trianglelefteq$).

Алгебраическая система $\mathcal{M}$ называется вычислимо (позитивно, негативно) устойчивой, если для любой пары ее вычислимых (позитивных, негативных) представлений μ,ν имеет место $(\mathcal{M},\mu)\approx(\mathcal{M},\nu)$.

Это определение является математическим уточнением единственности (с точностью до вычислимого изоморфизма) алгоритмического представления алгебраической системы в классе заданных представлений.

Например, нетрудно заметить, что всякая конечно порожденная алгебра позитивно устойчива. Для негативных алгебр это не так.

Хорошо известно, что если модель счетной сигнатуры имеет счетную бесконечную модель, то она имеет и модели любой бесконечной мощности, т.е. ее нельзя охарактеризовать с точностью до изоморфизма. Вместе с тем, иногда можно характеризовать системы с точностью до вычислимого изоморфизма в классе как позитивных, так и негативных представлений. Например, как уже отмечалось выше, стандартная модель арифметики Пеано, обогащенная естественным отношением линейного порядка является вычислимо категоричной в классе всех своих позитивных и негативных представлений (см. [8]). Заметим, что стандартная модель арифметики без отношения порядка имеет вычислимо неизоморфные негативные представления ([2]). Введение линейного порядка, согласованного со всеми операциями, в структуру негативной системы оказалось полезным с точки зрения возможности определения более обозримых алгоритмических представлений ([7, 1]). Однако эти и другие факты о различных описаниях (спецификациях) нагтивных моделей не снимают актуальности вопроса о том, какие же модели считать «стандартными» в негативном случае?

Далее, если $(\mathcal{M},\mu)$ — нумерованная система, то неявно «зашивая» алгоритмическое представление μ в каноническое обогащение $\mathcal{M}_\mu$, мы получим возможность инвариантного рассмотрения важнейших алгоритмических свойств системы $\mathcal{M}$, т.к. при естественной нумерации $\mu(n)=c_n$ нумерованная система $(\mathcal{M}_\mu,\mu)$ обладает тем свойством, что μ образует наименьший элемент относительно сводимости представлений в множестве классов эквивалентных представлений (по модулю отношения «быть взаимно сводимыми друг к другу»). Предложение 1 даёт дополнительное основание для использования такого подхода.

Если Φ — множество предложений логики первого порядка, то, как обычно, любую модель для Φ будем называть Φ-системой.

Пусть $\mathcal{M}$ — система сигнатуры Σ и μ — её нумерация. Перейдем к формулировке главного определения.

Определение 2. Система $\mathcal{M}_\mu$ называется универсально (экзистенциально, $\exists\forall$-, $\forall\exists$- и т.д.) определимой, если существует такое вычислимо перечислимое множество Φ

универсальных (экзистенциальных, $\exists\forall$ -, $\forall\exists$ - и т.д.) предложений сигнатуры $\Sigma \cup C$, что M_μ ‘ Φ и для всякой Φ -системы ее подсистема, порожденная константами либо изоморфна M_μ, либо не является Φ -системой.

Другими словами, определимость системы M_μ множеством формул Φ означает, что M_μ является единственной (с точностью до изоморфизма) Φ -системой, построенной из замкнутых Σ -термов.

Заметим, что в случае универсальной определимости условие «быть изоморфной M_μ, либо не являться Φ -системой» для подсистемы, порожденной константами избыточно, т.к. в этой ситуации все подсистемы Φ -системы автоматически будут Φ -системами в силу устойчивости универсальных предложений относительно подсистем. Поэтому в формулировке следующей теоремы условие универсальной определимости можно заменить на более сильное условие «для всякой Φ -системы ее подсистема, порожденная константами, изоморфна M_μ». Отметим также, что условие «либо изоморфна M_μ, либо не является Φ -системой» дает достаточно большой разброс элементарных свойств системы M_μ и порожденной константами не Φ -системы, т.к. они, как минимум, не являются элементарно эквивалентными.

Предложение 2. *Всякая вычислимо представимая модель универсально (экзистенциально) определима.*

Предложение 3. *Существует экзистенциально определимая негативно представимая система, не имеющая позитивных представлений.*

Список использованной литературы.

1.Kasymov N. Kh., Morozov A. S. Definability of linear orders over negative equivalences. Algebra and logic, 55(1), 2016, pp.24-37.

2.Khoussainov B. M., Slaman T., Semukhin P. -Presentasions of Algebras. Archive for Mathematical Logic, 45(6), 2006, pp.769-781.

3.Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск, Научная книга, 1999.

4.Ершов Ю. Л. Теория нумераций. Москва, Наука, 1977.

5.Касымов Н. Х. Об алгебрах над негативными эквивалентностями. Алгебра и логика, 33(1), 1994, С.76-80.

6.Касымов Н. Х. Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры. Успехи мат. наук., 51(3), 1996, С.145-176.

7.Касымов Н. Х., Дадажанов Р. Н. Негативные плотные линейные порядки. Сиб. матем. журн., 58(6), 2017, С.1306-1331.

8.Касымов Н. Х., Дадажанов Р. Н., Джавлиев С. К. Структуры степеней негативной представимости линейных порядков. Изв. вузов. Матем., 65(12), 2021, С.31-55.

9.Касымов Н. Х., Морозов А. С. Логические аспекты теории абстрактных типов данных. Вычислительные системы, ИМ СО АН СССР, Т. 122, 1987, С.73-96.

10.Мальцев А. И. Алгебраические системы. Москва, Наука, 1970.

11.Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань, Казанское математическое общество, 2000.